Cours 14 – 31/10/2024

7. Chocs

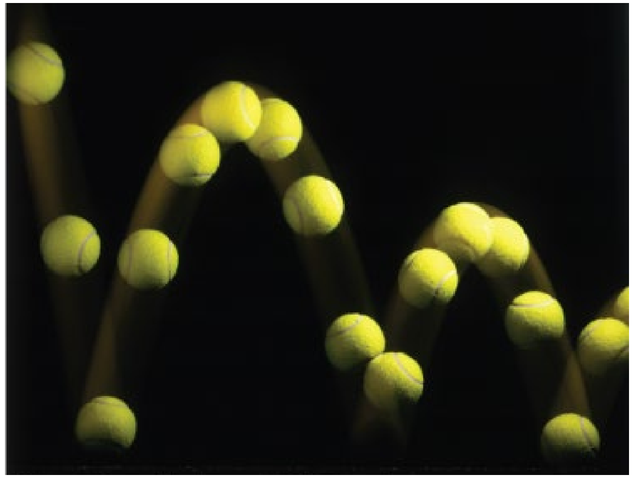
7.3. Chocs inélastiques

7.4. Système à masse variable

7.3. Chocs inélastiques (100%)

Définition

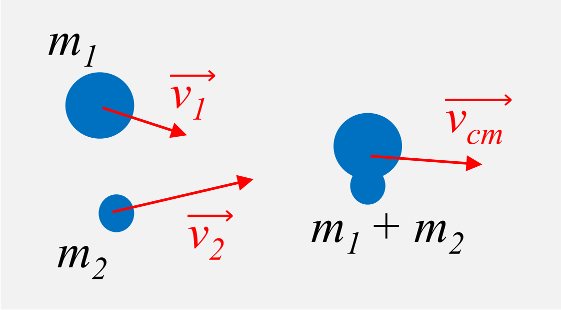
Dans un choc inélastique, la quantité de mouvement est conservée mais pas l'énergie cinétique.



Richard Megna/Fundamental Photographs

7.3. Chocs inélastiques (100%)

■ Condition



Choc 100% inélastique (ou choc mou) : correspond à la situation où les deux objets restent « collés » après le choc. Ce type de choc dissipe (en partie ou intégralement) l'énergie cinétique du système formé par les deux objets rentrant en collision.

Une seule condition (C1) : Conservation de la quantité de mouvement

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2}$$

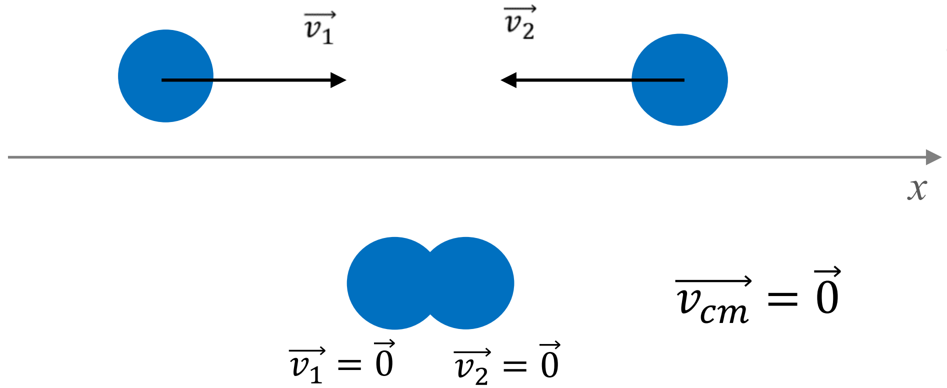
$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = (m_1 + m_2)\,\overrightarrow{v_{cm}}$$

⚠ **Il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique** $\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 \neq \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v_{cm}^2$

7.3. Chocs inélastiques (100%)

Exemple 1 : choc mou (100% inélastique) frontal entre deux billes de même masse m et ayant des vecteurs "vitesse" opposés mais de même norme (même quantité de mouvement).

Avant le choc



$\overrightarrow{v_{cm}} = \vec{0}$ *avec* $\overrightarrow{v_{cm}} = \dfrac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2}$

Après le choc

$\overrightarrow{v_{cm}} = \vec{0}$

(C1): $m\vec{v_1} + m\vec{v_2} = m\overrightarrow{v'_1} + m\overrightarrow{v'_2}$ *avec* $\overrightarrow{v'_1} = \overrightarrow{v'_2} = \vec{v'}$ *car les 2 objets ne forment plus qu'un après le choc*

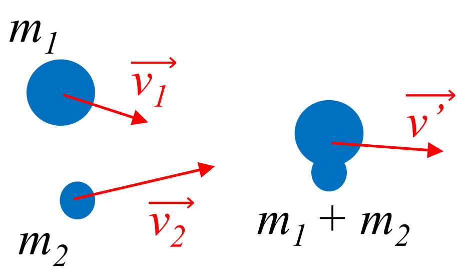
Energie cinétique avant le choc: $E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

Energie cinétique après le choc: $E'_c = \frac{1}{2}(2m)v'^2 = 0$

Non-conservation de l'énergie cinétique

7.3. Chocs inélastiques (100%)

Exemple 2 : choc mou entre deux billes avec masses et vitesses différentes



Avant le choc : $\vec{v_1}$ *et* $\vec{v_2}$

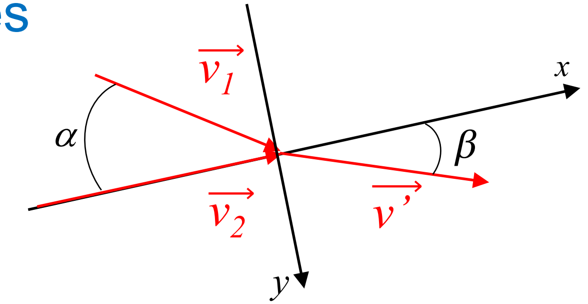
Après le choc : $\overrightarrow{v'_1} = \overrightarrow{v'_2} = \vec{v}'$

Conservation de la quantité de mouvement :

(C1) $m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = (m_1 + m_2)\vec{v}'$

d'où $$\boxed{\vec{v}' = \frac{m_1\,\vec{v_1} + m_2\,\vec{v_2}}{m_1 + m_2}}$$

<u>Calcul de v' et de sa direction (angle β) :</u>



On projette $\vec{v}' = \dfrac{m_1\,\vec{v_1} + m_2\,\vec{v_2}}{m_1 + m_2}$:

$$sur\ Ox : m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 = v'\cos\beta\ (m_1 + m_2)$$

$$sur\ Oy : m_1 v_1 \sin\alpha + 0 = v'\sin\beta\ (m_1 + m_2)$$

$$\sin\beta = \frac{m_1 v_1 \sin\alpha}{v'(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 v_1 sin\alpha \cos\beta\ (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2)}$$

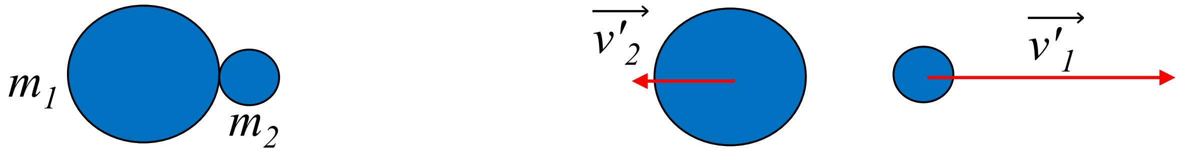
$$\tan\beta = \frac{m_1 v_1 sin\alpha}{(m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2)}$$

$$v' = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 + 2 m_1 v_1 m_2 v_2 cos\alpha}}{(m_1 + m_2)}$$

7.3. Chocs inélastiques (100%)

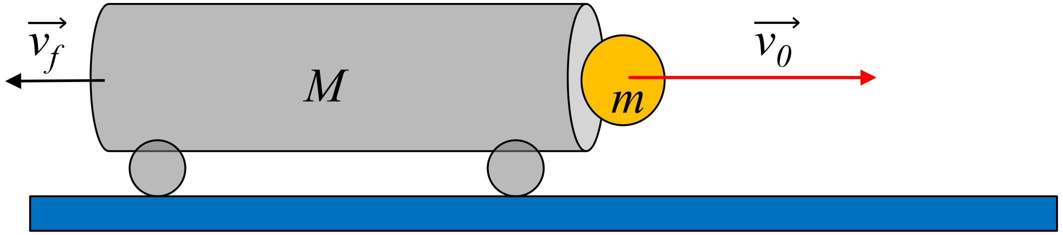
■ Autre type de « choc » mou

Avant choc — *Après choc*



$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{p_{sys}} = \vec{0}$ $\qquad$ $\overrightarrow{p'_{sys}} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{p'_1} = -\overrightarrow{p'_2}$

Exemple 2 : un canon immobile équipé de roues tire un boulet de masse m à la vitesse $\overrightarrow{v_0}$. Sachant que le canon roule sans frottement, calculez sa vitesse $\overrightarrow{v_f}$ après le tir.



Le tir peut être considéré comme un choc inélastique. L'énergie cinétique du système n'est pas conservée. En revanche, il y a conservation de la quantité de mouvement.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Quantité de mouvement avant le tir : } \vec{p} = \vec{0} \\ \textit{Quantité de mouvement après le tir : } \vec{p'} = m\overrightarrow{v_0} + M\overrightarrow{v_f} \end{array}\right\} \quad \overrightarrow{v_f} = -\frac{m}{M}\overrightarrow{v_0}$$

7.3. Chocs inélastiques (100%)

■ Variation de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2}_{E_c\ \text{après}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\,m_1 v_1^{\,2} + \frac{1}{2}\,m_2 v_2^{\,2}\right)}_{E_c\ \text{avant}}$$

variation de l'énergie cinétique du système

__Rem__: on peut aussi considérer la variation d'énergie cinétique entre un instant pris juste avant le choc, et un autre juste après. Dans ce cas le signe de ΔE_c est inversé.

soit $$\Delta E_c = \frac{1}{2}\frac{(m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2})^2}{m_1 + m_2} - \frac{1}{2}\,m_1 v_1^{\,2} - \frac{1}{2}\,m_2 v_2^{\,2}$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\frac{m_1^{\,2}v_1^{\,2} + m_2^{\,2}v_2^{\,2} + 2m_1m_2\,\vec{v_1}\vec{v_2}}{m_1 + m_2} - \frac{1}{2}\,m_1 v_1^{\,2} - \frac{1}{2}\,m_2 v_2^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{m_1}{m_1+m_2} - 1\right) v_1^{\,2} + m_2\left(\frac{m_2}{m_1+m_2} - 1\right) v_2^{\,2} + 2\,\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v_1}\vec{v_2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,v_1^{\,2} - \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,v_2 + 2\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v_1}\vec{v_2}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,v_1^{\,2} + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,v_2^{\,2} - 2\,\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v_1}\vec{v_2}\right]$$

On pose $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ d'où $\Delta E_c = -\dfrac{1}{2}\left[\,\mu\, v_1^{\,2} + \mu\, v_2^{\,2} - 2\mu\,\vec{v_1}\vec{v_2}\right] = -\dfrac{1}{2}\,\mu\,(\vec{v_1} - \vec{v_2})^2$

7.3. Chocs inélastiques (100%)

Variation de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique du système s'écrit

$\boxed{\Delta E_c = -\frac{1}{2}\mu\,(\vec{v_1} - \vec{v_2})^2}$ avec μ est la masse réduite telle que $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ soit $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

L'énergie cinétique perdue lors d'une collision 100% inélastique correspond à l'énergie cinétique de la masse réduite μ se déplaçant à la vitesse $\vec{v_1}$ - $\vec{v_2}$. Cette énergie se transforme en déformation/chaleur.

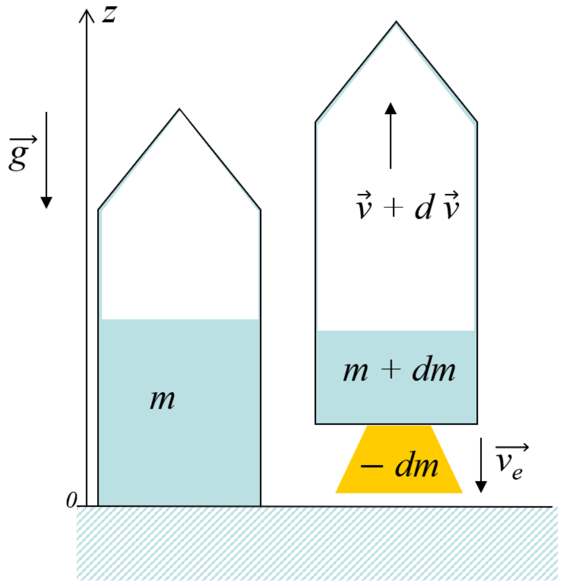
Pourcentage (variation relative) de l'énergie cinétique perdue : $\frac{|\Delta E_c|}{E_c} = \frac{\mu\,(\vec{v_1} - \vec{v_2})^2}{m_1 v_1^{\,2} + m_2 v_2^{\,2}}$

7.4. Système à masse variable

■ Mouvement avec masse variable: exemple de la fusée

Calcul de la vitesse d'une fusée au bout d'un temps t_f dans un champ de pesanteur terrestre (supposé constant)

Hors programme



a) Variation de la quantité de mouvement :

La masse totale de la fusée varie d'une quantité dm, avec dm négatif, correspondant au carburant consommé. Cette variation de masse dm est aussi la masse des gaz émis responsables de l'augmentation dv de la vitesse de la fusée.

A l'instant t, la quantité de mouvement est $\vec{p} = m\vec{v}$

A $t+dt$, la quantité de mouvement totale $\vec{p'}$ du système est la somme de la quantité de mouvement de la fusée à la vitesse $\vec{v}+d\vec{v}$ et de la quantité de mouvement des gaz émis dont la vitesse est $\vec{v_g} = \vec{v_e} + (\vec{v}+d\vec{v})$, $\vec{v_e}$ étant la vitesse d'émission des gaz par rapport à la fusée (qui est constante).

$$\vec{p'} = (m + dm)(\vec{v}+d\vec{v}) - dm(\vec{v_e}+\vec{v}+d\vec{v}) = m\vec{v} + md\vec{v} + dm\vec{v} + dmd\vec{v} - dm\vec{v_e} - dm\vec{v} - dmd\vec{v}$$
$$= m\vec{v} + md\vec{v} - dm\vec{v_e}$$

La variation de la quantité de mouvement du système entre t et $t+dt$:

$$d\vec{p} = \vec{p'} - \vec{p} = md\vec{v} - \vec{v_e}\,dm$$

7.4. Système à masse variable

Mouvement avec masse variable: exemple de la fusée

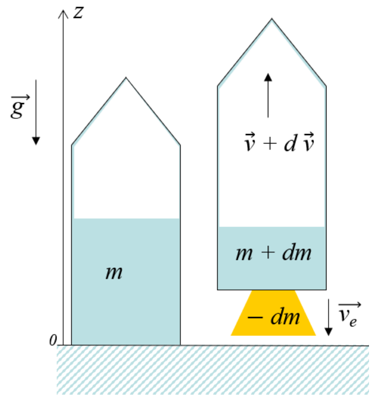
Hors programme

Variation de la quantité de mouvement par rapport au temps : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v_e}\dfrac{dm}{dt}$

2^{nd} loi de Newton : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{g}$ *On néglige la résistance de l'air, la variation de g avec l'altitude, et on suppose la Terre comme un référentiel galiléen*

Equation du mouvement (vertical) : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v_e}\dfrac{dm}{dt} = m\vec{g}$

On projette sur Oz : $m\dfrac{dv}{dt} + v_e\dfrac{dm}{dt} = -mg \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{v_e}{m}\dfrac{dm}{dt} - g$



On multiplie par dt et on intègre entre le décollage $v=0$ et la vitesse finale $v=v_f$ à $t=t_f$

$$\int_0^{v_f} dv = -v_e\int_{m_0}^{m_f}\frac{dm}{m} - g\int_0^{t_f} dt \Rightarrow [v_f - 0] = -v_e[\ln m_f - \ln m_0] - g[t_f - 0]$$

m_0 est la masse de la fusée avec le plein de carburant et m_f la masse de la fusée vide

finalement $v_f = v_e \ln\left(\dfrac{m_0}{m_f}\right) - gt_f$

A.N. : v_e = 55000 m/s et quantité de gaz expulsé 1290 kg/s
La masse initiale m_0 est 2,72x10^6 kg
Le temps jusqu'à ce que le carburant soit consommé est de 155s
La vitesse finale est v_f = 2680 m/s (9650 km/h)